Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2007-2008

Matemáticas

Serie 2

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen 2 puntos, y el problema, 4 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1. Sabemos que cierta función derivable $F(x)$ verifica las siguientes condiciones:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ y } F(1) = 3$$

***a*)** Encuentre $F(x)$.
***b*)** Calcule el área comprendida entre $F(x)$ y el eje OX desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

[1 punto por cada apartado]

2. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

***a*)** Encuentre la matriz M, cuadrada de orden 2, tal que $M \cdot A = B$.
***b*)** Compruebe que $M^2 = I_2$ (matriz identidad de orden 2) y deduzca la expresión de M^n.

[1 punto por cada apartado]

3. Discuta el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los valores del parámetro m.

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

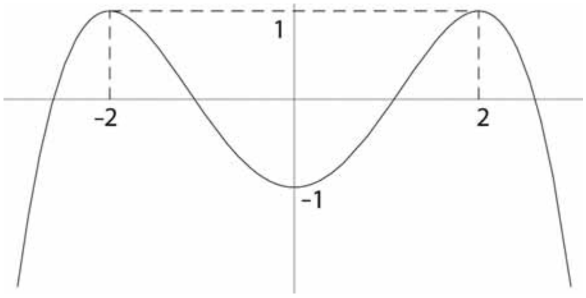
[2 puntos]

4. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular al plano π: $2x - y + z + 3 = 0$, que pasa por el punto $(-1, 3, a)$ del plano.

[2 puntos]

PROBLEMAS

5. Considere una función cuya representación gráfica en el intervalo (–3, 3) es la siguiente:



***a*)** Determine las abscisas de sus puntos extremos (máximos y mínimos) relativos.
***b*)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo (–3, 3).
***c*)** Haga un esbozo de la gráfica de la derivada de esta función.
***d*)** Sabiendo que la función es de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, encuentre de qué función se trata.

[0,5 puntos por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*; 1 punto por el apartado *c*; 2 puntos por el apartado *d*]

6. Dadas las rectas $r\colon \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ y $s\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z+5}{3}$ y el punto $P = (1, 1, -1)$, queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que corta r y s. Para conseguirlo:

***a*)** Encuentre la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene la recta r y el punto P.
***b*)** Encuentre el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s.
***c*)** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M.
***d*)** Compruebe que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

[1 punto por cada apartado]

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2007-2008

Matemáticas

Serie 5

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen 2 puntos, y el problema, 4 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1. Encuentre los valores de los parámetros *a* y *b* para que la siguiente función sea continua y derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

[2 puntos]

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, donde *a* y *b* son números reales.

a) Calcule el valor de *a* y *b* para que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Según los valores obtenidos en el apartado anterior, calcule A^3 y A^4.

c) Si *n* es un número natural cualquiera, dé la expresión de A^n en función de *n*.

[1 punto por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*; 0,5 puntos por el apartado *c*]

3. Diga para qué valor de *x* la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$. Escriba la ecuación de esta tangente.

[2 puntos]

4. Dados el plano π: $3x - 2y + 5z = 6$ y la recta r: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{-3}$, busque el punto de corte, si existe.

[2 puntos]

PROBLEMAS

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

a) Discútalo en función del parámetro *a*.
b) Resuélvalo cuando sea compatible indeterminado.
c) En el caso del apartado anterior, encuentre una solución del sistema en la que *x*, *y* y *z* tengan valores enteros.

[2,5 puntos por el apartado *a*; 1 punto por el apartado *b*; 0,5 puntos por el apartado *c*]

6. De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 cm, encuentre la longitud de los catetos del triángulo que tiene el perímetro máximo. Compruebe que la solución encontrada corresponda realmente al perímetro máximo.

[2,5 puntos por el cálculo de los catetos; 1,5 puntos por la comprobación]