Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemáticas

Serie 2

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen 2 puntos y el problema 4 puntos.

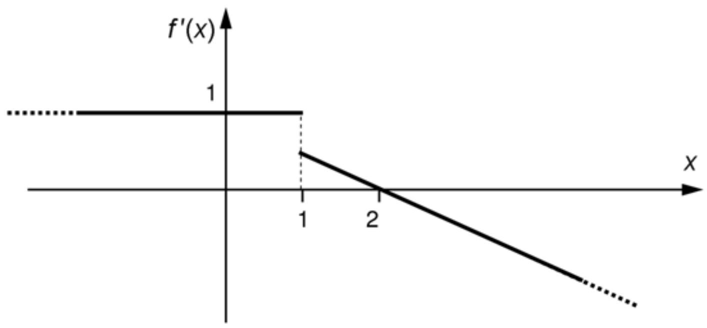
Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos con más prestaciones que las mencionadas.

CUESTIONES

1. Encuentre la ecuación del plano perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que pasa por el origen de coordenadas.

[2 puntos]

2. La función derivada $f'(x)$ de cierta función continua f: **R** → **R** es una función a trozos formada por las semirrectas del dibujo.



a) Diga si $f(x)$ es derivable en todos los puntos de **R** y por qué.
b) Estudie el crecimiento y el decrecimiento de $f(x)$.
c) Encuentre si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.
d) Sabiendo que $f(0) = 1$, calcule el valor de $f(1)$.

Justifique todas las respuestas.

[0,5 puntos por cada apartado]

3. Calcule los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

[2 puntos]

4. Halle los puntos de la recta r: $x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos π_1: $4x - 3z - 1 = 0$ y π_2: $3x + 4y - 1 = 0$.

[2 puntos]

PROBLEMAS

5. Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales vale 100 unidades por m^2, mientras que a través del techo es de 300 unidades por m^2. La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcule las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.

[4 puntos]

6. En el espacio se consideran los tres planos de ecuaciones:
π_1: $x + 2y + z = 1$, π_2: $px + y + pz = 1$ y π_3: $px + y + 2z = 1$, donde p es un parámetro real.

a) Averigüe para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Halle este punto cuando $p = 1$.

b) ¿Hay algún valor de p que hace que la intersección común sea una recta? Si es así, escriba la ecuación vectorial de esta recta.

c) Encuentre cuál es la posición relativa de los tres planos cuando $p = 1/2$.

[2 puntos por el apartado *a*, 1 punto por el apartado *b*, 1 punto por el apartado *c*]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la Universitat. Curs 2006-2007

Matemáticas

Serie 1

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen 2 puntos y el problema 4 puntos.

Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos con más prestaciones que las mencionadas.

CUESTIONES

1. ¿En qué punto la recta tangente a la función $f(x) = x \cdot e^x$ es paralela al eje de abscisas? Escriba la ecuación de la recta tangente en este punto.
[2 puntos]

2. Considere los puntos del espacio $P = (-1, a - 1, 3)$, $Q = (0, a - 2, 1 - a)$ y $R = (2, -1, 6 - 6a)$.
a) Halle el valor de a para el cual los tres puntos están alineados.
b) Cuando los tres puntos están alineados, ¿cuál es la ecuación de la recta que los contiene?
[1 punto por cada apartado]

3. Busque sus extremos relativos y los puntos de corte con los ejes, y haga una representación aproximada de la curva de ecuación $y = x^4 - x^2$. A continuación, calcule el área del recinto cerrado por esta curva y el eje de abscisas.
[1 punto por el cálculo de extremos, los puntos de corte y el gráfico; 1 punto por el cálculo del área]

4. Encuentre la ecuación de la recta contenida en el plano π: $x + 2y + 6z - 2 = 0$, que corta los ejes OY y OZ.
[2 puntos]

PROBLEMAS

5. Considere la recta de ecuación $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

a) Exprese el cuadrado de la distancia de un punto cualquiera (x, y, z) de la recta al punto $P = (1, 2, 5)$ como una función de la coordenada x.

b) Halle qué valor de x hace mínima esta función, deduzca qué punto Q de la recta es el más próximo a P y calcule la distancia del punto a la recta.

c) Escriba la ecuación de la recta que pasa por P y Q, y compruebe que es perpendicular a r.

[1,5 puntos por el apartado *a*, 1,5 puntos por el apartado *b*, 1 punto por el apartado *c*]

6. Discuta el siguiente sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$ en función del parámetro p. Dé la interpretación geométrica del sistema en cada caso y resuélvalo cuando sea compatible.

[4 puntos]